ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **IESSA 1998**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES INGENIEURS

ELECTRONICIENS DES SYSTEMES DE LA SECURITE AERIENNE

I.E.S.S.A. 1ER CONCOURS (BAC + 2)

ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

Les 4 parties du sujet sont indépendantes les unes des autres

Partie I - Questions de 1 à 7
Partie II - Questions de 8 à 27
Partie III - Questions de 28 à 33
Partie IV - Questions de 34 à 40

QCM mode d'emploi : cf ICNA commune

PARTIE I

n étant un entier naturel et *a* un nombre réel non nul on pose :

$$u_n = \int_0^{\pi} e^{ax}\cos nx\,dx \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\pi} e^{ax}\sin nx\,dx$$

1 - u_n vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $\begin{cases} u_n = \frac{1}{an}[e^{ax}\sin nx]_0^{\pi} \text{ pour } n > 0 \\ \text{et} \\ u_0 = \frac{1}{a}(e^{a\pi} - 1) \end{cases}$

c) $u_n = \frac{1}{n^2 + a^2}[e^{ax}(a\cos nx + n\sin nx)]_0^{\pi}$

d) $u_n = \frac{1}{n^2 - a^2}((-1^n)e^{a\pi}a - a)$

b) $u_n = \frac{1}{a}\left[e^{ax}\left(\cos nx - \frac{n}{a}\sin ax\right)\right]_0^{\pi} + \frac{n^2}{a^2}u_n$

2 - v_n satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $v_n = \frac{1}{an}[-e^{ax}\cos nx]_0^{\pi}$

b) $v_n = \frac{1}{a}\left[e^{ax}\left(-\frac{n}{a}\cos nx + \sin nx\right)\right]_0^{\pi} - \frac{n^2}{a^2}v_n$

c) $v_n = \frac{1}{n^2 - a^2}[e^{ax}(n\cos nx - a\sin nx)]_0^{\pi}$

d) $v_n = \frac{1}{n^2 + a^2}((-1)^{n+1}ne^{a\pi} + n)$

3 - La valeur absolue de u_n est pour tout $n \in \mathbb{N}$ majorée par :

a) $\dfrac{|a|}{n^2 + a^2}$ b) $\dfrac{|a|(1 + e^{a\pi})}{|n^2 - a^2|}$

et celle de v_n majorée par :

c) $\dfrac{n(1 - e^{a\pi})}{a^2 + n^2}$ d) $\dfrac{1 + e^{a\pi}}{an}$

4 - La suite (v_{2k}), $k \in \mathbb{N}^*$, est équivalente à la suite de terme général :

a) $\dfrac{1}{2k}(1 - e^{a\pi})$ b) $\dfrac{1 + e^{a\pi}}{k}$ c) $\dfrac{1}{2k}$ d) $\dfrac{1}{k}$

5 -

a) Les suites (u_n) et (v_n) ne peuvent être convergentes car elles ne sont pas de signe constant.

b) Les suites (u_n) et (v_n) convergent car toute suite majorée est convergente.

c) La suite (u_n) converge vers 0.

d) La suite (u_n) diverge car la suite $(\cos nx)$ n'a pas de limite.

On note Σu_n (respectivement Σv_n) la série numérique de terme général u_n (respectivement v_n)

6 -

a) La série Σv_{2k} converge car $\lim\limits_{k \to +\infty} v_{2k} = 0$

b) La série Σv_{2k} est de même nature que la série convergente $\Sigma \dfrac{(1 - e^{a\pi})}{2k}$

c) La série Σv_n diverge, comme somme d'une série divergente et d'une série convergente.

d) La série Σv_n converge car v_n est équivalent à $\dfrac{(-1)^{n+1} e^{a\pi}}{n}$, terme général d'une série convergente.

7 -

a) La série Σu_n est convergente car u_n est équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$

b) La série Σv_n est alternée donc ne peut être absolument convergente.

c) La série Σu_n est absolument convergente car $|u_n|$ est majoré par le terme général d'une série convergente de la forme $\dfrac{A}{n^2}$.

d) La série Σu_n est divergente.

PARTIE II

Soit f la fonction qui à x associe $\frac{1}{1 + u\cos x}$, où u est un nombre réel fixé.

8 - La fonction f est continue

a) sur $\mathbb{R}$ pour tout $u \in]-1,1[$
b) sur $[0,\pi]$ pour tout $u \in [-1,1]$
c) sur $[0,\pi]$ pour tout $u \in \mathbb{R}$
d) seulement sur $]0,\pi[$, pour tout $u \in]-1,1[$

9 - Pour $u = -1$, la fonction f est équivalente au voisinage de 0 à la fonction f_1

a) $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$ b) $f_1(x) = \frac{2}{x}$

et pour $u = 1$, la fonction f est équivalente au voisinage de π à la fonction f_2

c) $f_2(x) = \frac{2}{(x-\pi)^2}$ d) $f_2(x) = \frac{2}{\pi - x}$

10 - L'intégrale $\int_0^{\pi} f(x)dx$ est :

a) impropre pour tout $u \in [-1,1]$
b) non impropre, $\forall u \in [-1,1]$
c) impropre, uniquement pour $u = -1$
d) impropre pour $u \in [-1,1] tq |u| = 1$

11 - L'intégrale impropre $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(x-\pi)^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est

a) convergente pour $\alpha > 1$
b) divergente pour $\alpha > 1$

et l'intégrale $\int_0^{\pi} f(x)dx$, lorsqu'elle est impropre est

c) convergente car les deux intégrales $\int_0^b f(x)dx$ et $\int_b^{\pi} f(x)dx$ sont divergentes, $\forall b \in]0,\pi[$
d) divergente

On considère la fonction g qui à u réel associe $g(u) = \int_0^{\pi} f(x)dx$, lorsque cette intégrale est convergente.

12 - La fonction g est définie sur :

a) $]-1,1[$ b) $[-1,1]$ c) $[-1,1]-\{0\}$ d) $]-1,1]$

13 - Le changement de variable défini par $t = tg\frac{x}{2}$ donne

a) $g(u) = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{t^2+2tu+1}$

b) $g(u) = \int_0^{\pi} \frac{dt}{(1-u)+(1+u)t^2}$

et la fonction g s'écrit

c) $g(u) = \frac{\pi}{\sqrt{1-u^2}}$ pour tout $u \in]-1,1[$

d) $g(u) = \begin{cases} \frac{\pi|u|}{u\sqrt{1-u^2}} & \text{si } 0<|u|<1 \\ \text{et} & \\ \pi \quad \text{si } u = 0 & \end{cases}$

Soit h la fonction telle que $h(x) = \frac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1}$ où λ est un nombre réel.

14 - Le trinôme du second degré $X^2 - 2X\cos x + 1$

a) est strictement positif pour $x \in [0,\pi]$, $\forall X \in \mathbb{R}$
b) est strictement positif sur $\mathbb{R}$, pour $x \in]0,\pi[$ uniquement
c) admet une racine double 1 pour $x = 0$
d) est strictement négatif sur $\mathbb{R}$ pour $x \in [0,\pi]$

15 - La fonction h est

a) continue sur $[0,\pi]$ pour tout λ réel
b) indéfiniment dérivable sur $[0,\pi]$ pour tout λ réel tel que $|\lambda| < 1$
et la fonction $x \mapsto h(x)\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$, est intégrable
c) sur $[0,\pi]$ pour tout λ réel.
d) sur $[0,\pi]$ pour tout λ réel tel que $|\lambda| < 1$.

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $I_n = \int_0^{\pi} h(x)\cos nx\,dx$, lorsque cette intégrale existe.

16 - I_o est :

a) strictement positif

b) strictement négatif

et on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

c) $I_o \leq I_n \leq -I_o$

d) $-I_o < I_n < I_o$

17 - I_o peut s'exprimer sous la forme :

a) $I_o = g\left(-\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)\frac{1}{1+\lambda^2}$

b) $I_o = g\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)\frac{1}{1+\lambda^2}$

c) $I_o = \frac{\pi}{1-\lambda^2}$

d) $I_o = \frac{\pi}{\lambda^2-1}$

18 - Les racines du polynôme $X^2 - 2X\cos x + 1$ sont, pour tout x réel :

a) e^{ix} et e^{-ix}

b) réelles car le polynôme est à coefficients réels

et la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1-X^2}{X^2-2X\cos x+1}$ s'écrit :

c) $\frac{1}{1-Xe^{ix}} + \frac{1}{1-Xe^{-ix}}$

d) $-1 + \frac{1}{1-Xe^{ix}} + \frac{1}{1+Xe^{ix}}$

19 - La fraction rationnelle $\frac{1}{1-Xe^{ix}}$ peut se mettre sous la forme :

a) $\sum_{p=0}^{n-1} X^p e^{ipx} + \frac{X^n e^{inx}}{1+Xe^{ix}}$

b) $\sum_{p=0}^{n} X^p e^{ipx}$

et la fraction rationnelle $\frac{1-X^2}{X^2-2X\cos x+1}$ sous la forme :

c) $\sum_{p=0}^{n} 2X^p \cos px$

d) $2\sum_{p=1}^{n-1} X^p \cos px + X^n \frac{2\cos nx - 2X\cos(n-1)x}{X^2-2X\cos x+1}$

20 - La fonction k de la variable réelle λ, définie par $k(\lambda) = \dfrac{1-\lambda^2}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1}$ peut s'écrire sous la forme :

a) $k(\lambda) = 2\sum_{p=0}^{n} \lambda^p \int_0^{\pi} \cos px\,dx$

b) $k(\lambda) = 2\sum_{p=1}^{n-1} \lambda^p \int_0^{\pi} \cos px\,dx + 2\lambda^n (I_n - \lambda I_{n-1})$

et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence, valable $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

c) $\lambda^n (I_n - \lambda I_{n-1}) = \dfrac{\pi}{2}$

d) $I_n = \lambda I_{n-1}$

21 - Le terme général I_n de cette suite s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $I_n = \dfrac{\lambda^n \pi}{\lambda^2 - 1}$

b) $\left| \begin{array}{l} I_{2q} = \dfrac{\lambda^{2q}\pi}{1-\lambda^2} + \dfrac{\pi}{2}\left\{ \sum_{p=1}^{q-1} \left(\lambda^{2p} + \dfrac{1}{\lambda^{2p}} \right) + 1 + \dfrac{1}{\lambda^{2q}} \right\} \\ \\ I_{2q+1} = \dfrac{\lambda^{2q+1}\pi}{1-\lambda^2} + \dfrac{\pi}{2}\left\{ \sum_{p=1}^{q-1} \left(\lambda^{2p+1} + \dfrac{1}{\lambda^{2p+1}} \right) + 1 + \dfrac{1}{\lambda^{2q+1}} \right\} \end{array} \right.$

et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ

c) $\ell = 0$ d) $\ell = \dfrac{\pi}{2}$

22 - La fonction h, définie par $h(x) = \dfrac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1}$

a) est paire et π -périodique pour tout réel λ tel que $|\lambda| < 1$
b) est 2π -périodique et impaire pour tout réel λ
c) est, pour tout λ réel 2π -périodique mais n'est ni paire ni impaire
d) n'est périodique pour aucune valeur du réel λ

23 - La fonction h

a) n'est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour aucune valeur du réel λ
b) est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout réel λ
et sa dérivée h', si elle existe, s'écrit :

c) $h'(x) = -\dfrac{2\lambda\sin x}{(1-2\lambda\cos x+\lambda^2)^2}$

d) $h'(x) = \dfrac{2(\cos x-\lambda)}{(\lambda^2-2\lambda\cos x+1)^2}$

24 - Pour qu'une fonction soit développable en série de Fourier

a) il suffit qu'elle soit continue
b) il suffit qu'elle soit périodique
c) il est nécessaire qu'elle soit continue
d) il est nécessaire qu'elle soit dérivable

25 - La fonction h, pour λ réel tel que $|\lambda| < 1$

a) est développable en série de Fourier car elle est π -périodique et indéfiniment dérivable
b) n'est pas développable en série de Fourier
et son développement en série de Fourier, s'il existe, converge vers
c) $\begin{cases} h(x) \text{ en tout point } & x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 \quad \text{pour} & x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
d) la demi-somme des limites à droite et à gauche de h en tout point x de $\mathbb{R}$

26 - Les coefficients de Fourier trigonométriques a_n et b_n de h sont donnés, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout λ réel tel que $|\lambda| < 1$, par :

a) $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(x)\cos nx\,dx$ et $b_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(x)\sin nx\,dx$

b) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} h(x)\cos 2nx\,dx$ et $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} h(x)\sin 2nx\,dx$

c) $b_n = 0$ et $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi} h(x)\cos 2nx\,dx$ car h est paire

d) $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} h(x)\sin nx\,dx$ car h est impaire

27 - On a pour tout réel λ tel que $|\lambda| < 1$

a) $h(x) = \dfrac{1}{1-\lambda^2}\left\{1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^n\cos nx\right\}, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $h(x) = \dfrac{\pi}{1-\lambda^2}\left\{\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^n\cos nx\right\}, \forall x \in \mathbb{R}$

c) $h(x) = \frac{2}{1-\lambda^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \sin nx, \forall x \in \mathbb{R}$

d) $\frac{1}{1-\lambda^2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\lambda^n \cos nx\right\} = \begin{cases} h(x) & \text{pour } x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{pour } x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

PARTIE III

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de
$\mathbb{R}^3(e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1))$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

28 - La famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante, forme une base B_1 de $\mathbb{R}^3$

a) $V_1 = e_1$; $V_2 = e_2$; $V_3 = 3e_1$;
b) $V_1 = e_1$; $V_2 = e_2 - e_3$ car les vecteurs sont linéairement indépendants
c) $V_1 = e_1 + e_2$; $V_2 = e_2 - e_3$; $V_3 = 2e_1 - e_2 + 3e_3$;
d) $V_1 = e_1 + e_2$; $V_2 = e_2 - e_3$; $V_3 = e_1$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui, au triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, associe le triplet $(4x - 5y - 5z\ ,\ 5x - 6y - 7z\ ,\ -2x + 2y + 3z)$

29 - La matrice A de f dans la base B s'écrit :

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -5 & -6 & 2 \\ -5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -7 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -5 \end{pmatrix}$

et la matrice A' de f dans la base B_1 définie à la question 28 est de la forme :

c) $A' = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels d) A' est diagonale

30 - Les valeurs propres de A sont :

a) -1 et 1 simples
b) 2, 0, 1 simples
c) -1 simple et 1 double
d) -1 et 1 doubles

31 - L'endomorphisme f est :

a) inversible car 0 n'est pas valeur propre
b) non inversible car les valeurs propres ne sont pas toutes distinctes
c) non diagonalisable car une condition nécessaire de diagonalisation est que toutes les valeurs propres soient simples
d) diagonalisable

32 - P étant la matrice de passage de la base B à la base B_1 définie à la question 28 ; la matrice A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, s'écrit :

a) $A^n = P^{-1}A'^nP$

b) $A^n = P^{-1}A'^n$

c) $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n + 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ (-1)^n - 1 & 3^n - 2^n - 1 \end{pmatrix}$

d) $A^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4k & 1 - 4k & -4k \\ -4k & 4k & 1 + 4k \end{pmatrix}$ si $n = 2k$

et $A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 4k + 5 & -4k - 4 & 4k - 5 \\ -4k - 2 & 4k + 2 & 4k + 3 \end{pmatrix}$ si $n = 2k + 1$

33 - Le système différentiel $\begin{cases} x' = -x + z \\ y' = y + 2z \\ z' = z \end{cases}$ a pour solution générale $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) $X = \begin{pmatrix} C_1e^{-t} + C_3e^{-2t} \\ C_2e^{t} + 2C_3te^{t} \\ C_3e^{t} \end{pmatrix}$; $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

b) $X = \begin{pmatrix} C_1e^{-t} + C_3e^{t} \\ C_2e^{t} + 2C_3t \\ C_3e^{t} \end{pmatrix}; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

et le système différentiel $U' = AU$ a pour solution U, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à la base B

c) $U = (C_1e^{-t} + C_3e^{2t})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (C_2 + 2C_3t)e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $U = \begin{pmatrix} C_1e^{-t} + 2C_3e^{t} \\ C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3e^{t} + 2C_3t \\ -C_2e^{t} - 2C_3t \end{pmatrix}$

PARTIE IV

A tout réel a strictement positif on associe la fonction f_a définie par :

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

34 - La transformée de Laplace F_a de la fonction f_a est définie pour tout complexe $p = x + iy$ tel que :

a) $x \geq -\frac{1}{a}$ b) $x < \frac{1}{a}$

et lorsqu'elle existe, vaut :

c) $F_a(p) = -\frac{1}{ap + 1}$ d) $F_a(p) = \frac{1}{p + \frac{1}{a}}$

35 - La limite de la fonction f_a lorsque a tend vers 0,

a) n'existe pas, $\forall t \in \mathbb{R}$
b) est infinie pour t=0 et vaut 0 pour $t \in \mathbb{R}^*$
c) vaut 0 pour tout t réel
d) vaut 1 pour tout réel t

36 - La fonction F_a, lorsqu'elle existe, a pour limite lorsque a tend vers 0, pour tout p

a) 1
b) 0
c) $+\infty$
d) la transformée de Laplace en p de la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \lim_{a \to 0} f_a(t) & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

On considère l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = f_a(t) \qquad (E)$
Soit g_a la fonction de la variable réelle t telle que $g_a(t) = 0$ pour tout $t < 0$, continue sur $\mathbb{R}$, dérivable, de dérivée continue sur $]0, +\infty[$ vérifiant l'équation (E) sur $]0, +\infty[$ et admettant ainsi que sa dérivée g'_a une transformée de Laplace.

37 - L'équation (E^*) vérifiée par la transformée de Laplace G_a de g_a satisfait

a) $(p + 1)G_a(p) = -\dfrac{1}{ap + 1}$
b) $G'_a(p) + G_a(p) = \dfrac{1}{ap + 1}$
c) $pG_a(p)G_a(0) + G_a(p) = \dfrac{1}{ap - 1}$
d) $(p + 1)G_a(p) = \dfrac{1}{ap + 1}$

38 - La fonction G_a, transformée de Laplace de g_a, est définie pour tout nombre complexe $p = x + iy$ tel que :

a) $x > -\dfrac{1}{a}$
b) $x > -1$ car $-1 > -\dfrac{1}{a}$ $\forall a \in]0,+\infty[$
c) $x > \text{Sup}\left(-1, -\dfrac{1}{a}\right)$
d) $x < \text{Inf}\left(-1, -\dfrac{1}{a}\right)$

39 - La fonction G_a, lorsqu'elle est définie, s'écrit sous la forme

a) $G_a(p) = \dfrac{1}{1 - a}\left(\dfrac{1}{p + 1} - \dfrac{a}{ap + 1}\right)$
b) $G_a(p) = \dfrac{1}{1 - a}\left(\dfrac{a}{ap + 1} - \dfrac{1}{p + 1}\right)$

et la fonction g_a vaut, pour tout t réel positif ou nul :

c) $g_a(t) = \dfrac{1}{1 - a}(e^t - e^{t/a})$
d) $g_a(t) = \dfrac{1}{1 - a}(e^{-t/a} - e^{-t})$

40 - La limite de la fonction $g_a(t)$ lorsque a tend vers 0 vaut, pour tout t réel positif ou nul :

a) e^{-t}
b) 0
c) $+\infty$
d) $\begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t = 0 \end{cases}$